2ο μάθημα

1/11/19

Στο προηγούμενο...

Διαχωριστικό αξίωμα: A σύνολο (διακριτό)

$S(x)$: x ελεύθερο

$\underset{\downarrow \text{ σύνολο}}{B} = \{ \underbrace{x \in A} : S(x) : \text{αληθές} \}$

Παράδοξο του Russel

Π.χ. $A = \{ x : x \text{ σύνολο} \}$

Είναι το A σύνολο (?) (Με άτοπο)

Αν ήταν τότε από το διαχωρ. αξίωμα

$\exists B = \{ \underbrace{x \in A} : \underbrace{x \notin x}_{S(x)} \}$

B σύνολο

Τότε όμως $y \in B \iff (y \in A) \land (y \notin y)$ (1)

$\iff (y : \text{σύνολο}) \land (y \notin y)$

Επιλέγουμε $y_0 = B$.

Παρατ. ότι $y_0 \in A$

y_0 σύνολο.

Άρα $y_0 \in A$ αληθής. (2)

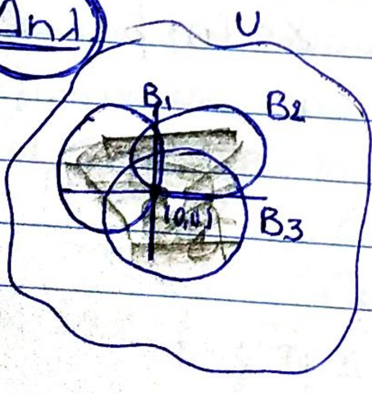
Άρα (1) $\rightarrow$ $y_0 \in B \iff (y_0 \in A) \land (y_0 \notin y_0)$

$\iff y_0 \notin y_0$ (3)

$B \in B \iff B \notin B$ (ΑΤΟΠΟ)

Αξίωμα της ένωσης: Αν C συλλογή συνόλων (σύνολο με στοιχεία σύνολα) τότε $\exists U$ σύνολο ώστε αν $x \in X$, κ. $X \in C$ $\implies x \in U$

Δηλ



$C = \{B_1, B_2, B_3\}$

$\longrightarrow$

$(\exists X \in C)(x \in X)\}$

$B = \{x \in U : S(x)\} = \{x \in U : (\exists X \in C)(x \in X)\}$

εξασφαλίζ. από τα αξίωμα της ένωσης

διαχωρ. αξίωμα

Κατασκ. $B = \cup C$

Κατασκ. δοθέν C συλλογής συνόλων, ένα σύνολο B ώστε $x \in B \iff \exists X \in C : x \in X$ (1)

B μοναδικό, ώστε η (1) αληθής ?

Έστω ότι $\exists$ σύνολο Γ ώστε να ισχύει:

$x \in \Gamma \iff \exists X \in C : x \in X$

Τότε $\underline{x \in \Gamma} \iff \underline{x \in B}$ (Δηλ. τα B, Γ έχουν τα ίδια στοιχεία)

Από το Αξίωμα 1 $\Rightarrow \Gamma = B$

$\Rightarrow B$ είναι μοναδικό ώστε να ισχύει η (1)

Επειδή B κ.ορ. $B = \cup C$

Π.χ. $C = \emptyset$

$\cup C = \{x \in U : x \in X$ για κάποιο $X \in C\} = \emptyset$, $C = \emptyset$

$C = \{A\}$

"η C περιέχει μόνο 1 σύνολο ως στοιχείο, το A"

$\cup C = \{x \in U : x \in X$ για κάποιο $X \in \{A\}\}$

$= \{x \in U : \underline{x \in A}\} = A$

$\underline{A \subseteq U}$

πχ. $C = \{A, B\}$

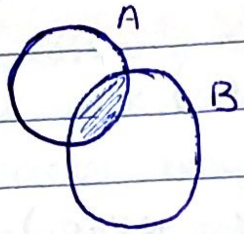
$$\bigcup C = \{x : (\exists X \in C)(x \in X)\}$$

$$= \{x : x \in X \in \{A, B\}\}$$

$$= \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\} = A \cup B$$

"Τομή συνόλων"

$\{A, B\} = C$



$A \cap B := ?$ (πως την ορίζω ?)

$$\boxed{x \in A \cap B \Longleftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)}$$

Από το διαχωρ. αξίωμα:

$$\{x \in U : S(x)\}$$

άρα $A \cap B := \{\underline{x \in A} : \underbrace{x \in B}_{S(x)}\}$

Αλλιώς μπορούσαμε να πούμε:

$$\Delta := \{x \in B : x \in A\}$$

Δηλ (αναλυτικά):

$\Delta := \{x \in B : x \in A\}$

$\Delta' := \{x \in A : x \in B\}$

Τότε παρατ. ότι $x \in \Delta \Longleftrightarrow (x \in B) \wedge (x \in A)$

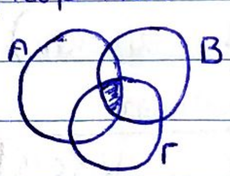
$$\Longleftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

$$\Longleftrightarrow x \in \Delta'$$

Δηλ. $\Delta = \Delta' = A \cap B$

C συλλογή συνόλων, $C \neq \emptyset$.

Θέλουμε να ορίσουμε $\bigcap C$ με τη βοήθεια των αξιωμάτων τ.ω. $(\forall x)(x \in \bigcap C \Longleftrightarrow (\forall X \in C)(x \in X))$.



$C = \{A, B, \Gamma\}$

$C \neq \emptyset$.

Διαλέγουμε ένα $X_1 \in C$.

Ορίζουμε $\Delta_{X_1} = \{\underset{\text{είναι σύνολο από το διαχωρ. αξ.}}{x \in X_1} : \underbrace{(\forall X \in C)(x \in X)}_{S(x)}\}$

Το Δ εξαρτάται από το X_1

x ελεύθερο

X δεσμ.

Τότε $x \in \Delta \iff (x \in X_1) \wedge [(\forall X \in C)(x \in X)]$

Μπορώ να πω ότι $\Delta x_1 = \bigcap C$?

Αν $X_2 \in C$

$\Delta x_2 = \{x \in X_2 : (\forall X \in C)(x \in X)\}$

Ποιο θα "ονομάσω" $\bigcap C$? → Εξαρτάται ποια είναι τα X_1, X_2

Θ.δ.ο. αν $X_1, X_2 \in C \Rightarrow \Delta x_1 = \Delta x_2$

Θ.δ.ο. $y \in \Delta x_1 \iff y \in \Delta x_2$

$y \in \Delta x_1 \iff (y \in X_1) \wedge (y \in X \quad \forall X \in C)$

$\iff (y \in X : \forall X \in C)$

γιατί το X_1 ανήκει ήδη στο C

$\iff (y \in X_2) \wedge (y \in X : \forall X \in C)$

$\iff y \in \Delta x_2$

άρα $\Delta x_1 = \Delta x_2$

Άρα ορίζουμε $\boxed{\bigcap C = \Delta x_1}$, όπου $X_1 \in C$

"Διαφορά συνόλων"

$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} = \{x \in A : S(x)\}$

σύνολο

όπου $S(x)$: "$x \notin B$"

A, B δύο σύνολα

Π.χ. Θέλουμε να μιλήσουμε για την $\bigcap \emptyset$ (αν μπορούμε).

Θα εντοπίσουμε λοιπόν για ποια x ισχύει $x \in X \ \forall X \in \emptyset$

C

(Αναμένουμε $\bigcap \emptyset = V := \{x : \text{σύνολο}\}$:= σύμπαν)

Θα απαντήσουμε την αντίθετη ερώτηση

δηλ. για ποια x $\boxed{\text{δεν ισχύει ότι } x \in X, \ \forall X \in \emptyset}$ $\iff$

$\Leftrightarrow$ για ποια x : $\sim[(\forall X\in\phi)(x\in X)]$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{\exists X\in\phi}_{\text{αδύνατο}}$: $x\notin X$

Άρα $\nexists x$ ώστε να μην ανήκει στην $\cap\phi$

Συνεπώς η $\cap\phi$ δεν ορίζεται

Αξίωμα 6 (Αξίωμα δυναμοσυνόλου):

Για κάθε σύνολο A $\exists$ μια συλλογή (σύνολο) που περιέχει μεταξύ όλων των στοιχείων της όλα τα υποσύνολα του A.

Ονομάζουμε U το σύνολο που προκύπτει από το προηγούμενο αξίωμα. Τότε:

$\forall X\subseteq A \Rightarrow X\in U$

Θα ορίσουμε τώρα το $P(A) = \{X\in \overbrace{U}^{\boxed{\text{σύνολο}}} : \overbrace{X\subseteq A}^{\text{συνθήκη}}\}$ (δυναμοσύνολο του A) σαν σύνολο από το διαχωρ. αξίωμα το οποίο ορίζεται

$= \{X\in U : (\forall x)(x\in X \Rightarrow x\in A)\}$

π.χ. Δίνονται A, B, C, D 4-σύνολα

Ερώτημα: Μπορούμε να μιλήσουμε για το σύνολο $\{A,B,C,D\}$;

Μπορώ να κατασκευάσω το σύνολο $\{A,B\} = X_1$

$\forall A,B$: Μπορώ να χρησιμοποιώντας το αξίωμα του μη διατεταγμένου ζεύγους

Παρόμοια $\{C,D\} = X_2$

$C = \{X_1, X_2\}$ υπάρχει

σύνολο $\cup C = X_1 \cup X_2 = \{A,B,C,D\}$

Χρησιμοποιούμε $\{c,b\}$ διότι έχω ήδη δείξει ότι c: 1ο. Ομοίως κ' τα άλλα.

Π.χ. $A=\{a,b,c,d\}$

1ο : c

2ο : b $\qquad K=\{\{c\},\{c,b\},\{c,b,d\},\underbrace{\{c,b,d,a\}}_{=A}\}$

3ο : d

4ο : a $\qquad =\{A,\{c,b\},\{c\},\{c,b,d\}\}$

Παρατ. ότι το $\{c\}$ περιέχεται σε όλα τα στοιχεία του K $\{c\}\subseteq\{c,b\},\{c,b,d\},A$, δηλ. c : 1ο

$\subseteq\{c\}$

$\{c,b\}\subseteq\{c,b\},\{c,b,d\},A$, δηλ. b : 2ο

Ομοίως κ' τα άλλα

Έτσι διατάσσω τα στοιχεία.

⇓ άρα

$(a,b) \overset{\text{ορ.}}{=} \{\{a\},\{a,b\}\}$

a ↑ 1ο, b ↑ 2ο

Μας ενδιαφέρει να ισχύει η εξής ιδιότητα:

Αν $(a,b)=(x,y) \Leftrightarrow (a=x)\wedge(b=y)$

Αποδ.

$\Leftarrow$) Έστω ότι $a=x$ κ' $b=y$,

$(a,b) \underset{\text{ορ.}}{=} \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\} = (x,y)$

$\Rightarrow$) Έστω ότι $\boxed{(a,b)=(x,y)}$ (1). Θ.δ.ο. $a=x$ κ' $b=y$

(1) $\Leftrightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\}$

1η περίπτ.: $a=b \overset{(1)}{\Rightarrow} \{\{a\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\}$ (3)

μονοσύνολο

(έχει μόνο ένα στοιχείο)

$\Rightarrow \{\{x\},\{x,y\}\}$ μονοσύνολο

→

$\Rightarrow \{x\} = \{x,y\}$ (2)

$\Rightarrow y = x$

(διότι $y \in \{x,y\} \overset{(2)}{=} \{x\} \Rightarrow y \in \{x\} \Rightarrow y = x$)

(3) $\overset{x=y}{\Rightarrow} \{\underbrace{\{a\}}\} = \{\{x\},\{x,x\}\} = \{\underbrace{\{x\}}\}$

$\Rightarrow \{a\} = \{x\} \Rightarrow a = x$

$\left.\begin{matrix} \text{Έχουμε ότι } a = b \\ x = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = b = x = y$

$\Rightarrow a = x$ και

$b = y$

2η περίπτ. : $a \neq b$

Η υποθ. μας είναι $\{\{a\},\{a,b\}\} \overset{(1)}{=} \{\{x\},\{x,y\}\}$

Αφού $a \neq b \Rightarrow \underset{\notin b}{\{a\}} \neq \underset{\in b}{\{a,b\}} \Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\}$ 2-σύνολα

(έχει ακρ. 2 διαφορ. στοιχεία)

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \{\{x\},\{x,y\}\}$ 2-σύνολο $\Rightarrow \boxed{x \neq y}$

$\{a,b\}$ 2-σύνολα

$\{x,y\}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \{a\} = \{x\}$ (2)'

και $\{a,b\} = \{x,y\}$ (3)'

$\{a\}$ 1-σύνολα

$\{x\}$

(2)' $\Rightarrow a = x$

(3)' $\Rightarrow \{a,\underset{\in b}{b}\} = \{a,y\}$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow b \in \{a,y\} \\ b \neq a \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = y$

∎

A, B 2-σύνολα

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο $(A \times B)$ ώστε

$z \in \boxed{A \times B} \Leftrightarrow \{(\exists x \in A) \wedge (\exists y \in B) : z = (x, y)\}$

δηλ. $A \times B = \{ z \in U : \underbrace{(\exists x \in A)(\exists y \in B) : z = (x,y)}_{S(z)} \}$

Αρκεί να βρω ένα U $\forall x \in A$, $\forall y \in B \Rightarrow (x,y) \in U$

$(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$

$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \subseteq P(A \cup B)$, $\forall x \in A$

$x \in A,\ y \in B \Rightarrow \{x, y\} \in P(A \cup B)$

$\Rightarrow \forall x \in A,\ \forall y \in B : \{x\}, \{x,y\} \in P(A \cup B)$

Εμένα όμως με ενδιαφέρει το διατετ. ζεύγος

$\Downarrow$

$\{\underbrace{\{x\}}_{\in P(A \cup B)}, \underbrace{\{x,y\}}_{\in P(A \cup B)}\} \subseteq \Delta = P(A \cup B)$

$\Rightarrow (x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\} \in P(P(A \cup B))$

<u>Συνεπώς</u>: $U = P(P(A \cup B))$